第21講　数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法

§1 ▶ 数列の和と一般項

要点整理 と 公式

要点 1 数列の和の式から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$a_1 = S_1$ である。

また,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}$$

である。よって，$S_n = S_{n-1} + a_n$ である。

したがって，以下のことが成り立つ。

> **■ 数列の和と一般項**
>
> 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると
>
> $a_1 = S_1$
>
> $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

(ex) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n が，$S_n = n^2 - 3n$ で表されているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$　である。

また，$n \geqq 2$のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4) \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

$a_1 = -2$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 2n - 4$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = 3n^2 + 2n$　　　(2)　$S_n = 2^n - 1$

Point Pickup

和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

初項について　$a_1 = S_1$　……①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$　……②

数列 $\{a_n\}$ の初項は①より求めることができる。

②の式において $n = 1$ を代入し，①の結果と一致するか確認することにより，

②が $n = 1$ でも成り立つかをチェックする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 漸化式

要点整理 と 公式

要点 2 漸化式

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 1$ で定義される数列を考える。

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$$

これを繰り返すと，この数列のすべての項が順に定義される。

このように，数列 $\{a_n\}$ の初項，または初項からいくつかの項と，それをもとにして順に次の項を定めるための規則を与えると，この数列のすべての項を順に定義することができる。これを「帰納的定義」という。

上の例においては，式　$a_{n+1} = 3a_n + 1$ によって規則が定められる。このように，前の項から次の項を定めるための関係式を「　　　　　」という。

※以後，断りのない限り，漸化式は $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ で成り立つものとする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の初項と漸化式によって定まる数列 $\{a_n\}$ の最初の 5 項を求めよ。

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 2$　　(2)　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2n$

Point Pickup

漸化式から順に項を求める

前の項から次の項を定めるための関係式を「漸化式」という。

この関係式と，初項(または初項からいくつかの項)によって，この数列のすべての項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 漸化式と一般項

要点整理 と 公式

要点3 等差数列・等比数列を表す漸化式

等差数列の各項は，前の項に一定の数 d（公差）を足すことによって順次得られる。よって，等差数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1} = a_n + d$$

この漸化式により，等差数列の公差 d が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等差数列の一般項を求めることができる。

（ex）$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2$　によって定まる数列 $\{a_n\}$ は，初項　　，公差　　の等差数列である。よって，$a_n =$

等比数列の各項は，前の項に一定の数 r（公比）を掛けることによって順次得られる。よって，等比数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1} = ra_n$$

この漸化式により，等比数列の公比 r が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等比数列の一般項を求めることができる。

（ex）$a_1 = 3$，$a_{n+1} = 4a_n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ は，初項　　，公比　　の等比数列である。

よって，$a_n =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 $a_{n+1}=a_n+(\ n$の式$\ )$の形の漸化式

$a_{n+1}=a_n+$（n の式）の形をした漸化式は，$a_{n+1}-a_n=$（n の式）と変形することができる。つまり，隣り合う 2 つの項の差が n の式，すなわち数列の一般項を表している。隣り合う 2 項の差を項とする数列を，もとの数列の「　　　　数列」といった。上記の（n の式）は，階差数列の一般項を表す。

この階差数列の一般項を用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

(ex) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n-2$　によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_{n+1}=a_n+n-2$　より，$a_{n+1}-a_n=n-2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n-2$　である。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)=2+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-5n+8)$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2-5n+8)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = -3,\ a_{n+1} = a_n + 5$　　(2) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = 3a_n$

［2］ 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 8n$　　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4^n$

Point Pickup

等差数列・等比数列を表す漸化式

$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$ は，初項 a，公差 d の等差数列を表す。

$a_1 = a,\ a_{n+1} = ra_n$ は，初項 a，公比 r の等比数列を表す。

$a_{n+1} = a_n +$ (n の式) の形の漸化式

$a_{n+1} - a_n =$ (n の式) より，数列 $\{a_n\}$ の「階差数列」の一般項が(n の式)である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 数学的帰納法

要点整理 と 公式

要点5 数学的帰納法

$a_n = 5^n - 2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，

$a_1 = 3$,　$a_2 = 21$,　$a_3 = 117$,　$a_4 = 609$

である。$21 = 3 \times 7$，$117 = 3 \times 39$，$609 = 3 \times 203$　より，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 4 項までは 3 の倍数であることがわかる。では，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて 3 の倍数であろうか。

ある事柄が，すべての自然数 n に対して成り立つことを，無数にある自然数 1 つ 1 つについて確かめることは不可能である。

さて，数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$　のように，初項と，前の項から次の項を定めるための関係式(「漸化式」)が与えられれば，順々にすべての項を定めることができる。これと同様に，ある命題①がすべての自然数 n について順々に成り立つことを確かめる方法として，次のような手順がある。

［1］ $n = 1$ のとき　命題①が成り立つ。

［2］ $n = k$ のとき　命題①が成り立つことを仮定すると，

$n = k + 1$ のときも命題①が成り立つ。

［1］，［2］が示されることにより，

［1］より，$n = 1$ のとき①は成り立つ。

［2］より，$n = 1$ のとき①が成り立つならば，$n = 2$ のときも①は成り立つ。

［2］より，$n = 2$ のとき①が成り立つならば，$n = 3$ のときも①は成り立つ。

以下同様にして，$n = 4, 5, 6, \cdots\cdots$ のときにも①は成り立ち，結果的にすべての自然数 n で①が成り立つことがいえる。

このような証明法を，「 数学的帰納法 」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)\cdots$ ①　が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

［1］ $n=$　　のとき　①の左辺 $=1$,　①の右辺 $=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって，①は成り立つ。

［2］ $n=$　　のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)\cdots\cdots ②$$

$n=k+1$ のとき，①の左辺は

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)$$

となる。これを②を用いて変形すると

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}\cdot2(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)\ \cdots\cdots\ ①$$

Point Pickup

数学的帰納法による証明

すべての自然数 n である命題が成り立つことを証明する手順は以下。

［1］ $n=1$ のときに成り立つことを確認。

［2］ $n=k$ のときに成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときに成り立つことを示す。

とくに［2］において，左辺を変形して右辺を導くときは，$n=k+1$ のときの右辺の形をイメージしておくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　確認テスト

1　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項について，

$a_1 =$ [ア] である。また，$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

よって，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。したがって，$a_n =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

2　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2 = 2a_1 - 3 =$ [エ]，$a_3 =$ [オカ]，$a_4 =$ [キク] である。

3　(1)　$a_1 = -1$，$a_{n+1} = a_n + 6$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [ケ] $n -$ [コ] である。

(2)　$a_1 = 5$，$a_{n+1} = 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [サ] $\cdot$ [シ] $^{n-1}$ である。

4　$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2n = n(n + 1)$ ……① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

［1］　$n = 1$ のとき　①の左辺 = [ス]，　①の右辺 = [ス] より①は成り立つ。

［2］　$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k = k(k + 1)$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を変形すると

$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + 2(k +$ [セ] $)$

$= 2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + (2k + 2)$

$= k(k + 1) + (2k + 2)$

$= (k +$ [ソ] $)(k +$ [タ] $)$　（ただし，[ソ] $<$ [タ] とする）

$= (k + 1)\{(k + 1) + 1\}$

よって，$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

［1］［2］より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法

1

(1) $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$　である。

また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (3n^2 + 2n) - \{3(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$
$$= (3n^2 + 2n) - (3n^2 - 4n + 1)$$
$$= 6n - 1$$

$a_1 = 5$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 6n - 1$

(2) $a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$　である。

また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1)$$
$$= 2^n - 2^{n-1}$$
$$= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \cdot 2^{n-1} = (2-1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$a_1 = 1$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 2^{n-1}$

2

(1) $a_1 = 2$，$a_2 = a_1 - 2 = 0$，$a_3 = a_2 - 2 = -2$，$a_4 = a_3 - 2 = -4$，$a_5 = a_4 - 2 = -6$

(2) $a_1 = 3$，$a_2 = 3a_1 - 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$，$a_3 = 3a_2 - 2 \cdot 2 = 3 \cdot 7 - 4 = 17$，

$a_4 = 3a_3 - 2 \cdot 3 = 3 \cdot 17 - 6 = 45$，$a_5 = 3a_4 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 45 - 8 = 127$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ (1) 初項−3，公差 5 の等差数列を表す。

よって，$a_n = -3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 8$

(2) 初項 9，公比 3 の等比数列を表す。

よって，　$a_n = 9 \cdot 3^{n-1} = 3^2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1}$

［2］ (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = 8n$ である。

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 8k = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = 4(n^2 - n + 1)$$

$a_1 = 4$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n = 4(n^2 - n + 1)$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = 4^n$ である。

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}$$

$a_1 = 2$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n = \dfrac{4^n + 2}{3}$

4

［1］ $n = 1$ のとき，左辺 $= 1$，右辺 $= \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1) = 1$

よって，①は成り立つ。

［2］ $n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) = \frac{1}{2}k(3k - 1)$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を変形すると

$$1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) + \{3(k + 1) - 2\}$$

$$= 1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) + (3k + 1)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　確認テスト

1　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項について，

$a_1 =$ [ア] である。また，$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

よって，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。したがって，$a_n =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

2　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 3$（$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2 = 2a_1 - 3 =$ [エ]，$a_3 =$ [オカ]，$a_4 =$ [キク] である。

3　(1)　$a_1 = -1$，$a_{n+1} = a_n + 6$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [ケ] $n -$ [コ] である。

(2)　$a_1 = 5$，$a_{n+1} = 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [サ] $\cdot$ [シ] $^{n-1}$ である。

4　$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2n = n(n + 1)$ ……① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

［1］　$n = 1$ のとき　①の左辺＝ [ス]，　①の右辺＝ [ス] より①は成り立つ。

［2］　$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k = k(k + 1)$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を変形すると

$$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + 2(k + \boxed{セ})$$
$$= 2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + (2k + 2)$$
$$= k(k + 1) + (2k + 2)$$
$$= (k + \boxed{ソ})(k + \boxed{タ}) \quad （ただし，\boxed{ソ} < \boxed{タ} とする）$$
$$= (k + 1)\{(k + 1) + 1\}$$

よって，$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

［1］［2］より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1　ア　1　　イ　2　　ウ　1

2　エ　1　　オ　−　　カ　1　　キ　−　　ク　5

3　(1)　ケ　6　　コ　7　　(2)　サ　5　　シ　2

4　ス　2　　セ　1　　ソ　1　　タ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。